

Ti-6Al-4V 製ディスクの過回転バーストに至る終局限界評価

Ultimate Limit State Evaluation for Overspeed Burst of Ti-6Al-4V Disk

北村 優太	技術開発本部技術基盤センター数理工学グループ 主査 博士(工学)
津 乗 充良	技術開発本部技術企画部 グループ長 博士(工学)
山田 剛久	技術開発本部技術基盤センター材料・構造グループ グループ長 博士(工学)
北村 祥之	航空・宇宙・防衛事業領域技術開発センターエンジン技術部 グループ長
牛田 博久	航空・宇宙・防衛事業領域技術開発センター要素技術部 主査

航空エンジンにおいて、ディスク過回転時のバースト回転数の予測精度を向上させてディスクを軽量化することが、競争力強化の観点から期待されている。構造解析によるディスクバーストの予測精度向上のためには、破断までの材料の終局挙動をモデル化することが重要となる。本研究では、Ti-6Al-4V 製ディスクを対象にデジタル画像相関法によって取得した高ひずみ領域までの応力ひずみ関係を用いた構造解析と、応力状態に依存する破断ひずみに基づく延性破壊クライテリアを用いて過回転バーストに至る終局限界評価を実施した。

In aero engines, it is expected to improve the prediction accuracy of the disk burst rotation speed under overspeed condition and reduce the weight of the disk. In order to improve the prediction accuracy of disk burst by structural analysis, it is important to model the ultimate behavior of the material until fracture. In this study, the ultimate limit state evaluation leading to overspeed burst was carried out by structural analysis for a Ti-6Al-4V disk. The stress-strain relationship up to the high-strain region obtained by the digital image correlation method and the ductile fracture criterion based on the fracture strain dependent on stress state were used in this evaluation.

1. 緒 言

航空エンジンにおいて、ディスクやシャフトなど、破壊した場合にエンジンを安全に停止できない状態となる部品を Life Limited Part (LLP) と呼ぶ。LLP の破壊は大事故につながるおそれがあるため、その寿命に制限があり一定期間使用されると交換が必要となる。LLP を設計し実用化するにはアメリカ連邦航空局の認証が必要であり、ディスクの認証では運用上の最大回転数の 120% でバーストしないことなどが要求される⁽¹⁾。また、認証の取得には、試験または解析によって要求を満足することを立証することが必要となる。現在はディスクバースト試験によって要求を満たすことを立証しているが、コストと時間の削減のために、構造解析による立証が望まれている。

ディスクの過回転バーストにおいて、径方向変位の増加によって慣性力が増加することで構造不安定に陥る構造不安定バーストと、材料が変形して破断ひずみに到達することで延性破壊する延性破壊バーストの二つの破壊形態が考えられる。構造解析によってこれらのバーストが発生する回転数を高精度に予測するためには、材料がネッキングするような高ひずみ領域の変形挙動や最終的な破断現象など

の材料の終局挙動の考慮が重要となる。しかし、ひずみゲージなどでは試験片にネッキングが生じるような高ひずみ領域における局所的なひずみを計測することが難しく、また、単一のひずみだけでは最終破断を十分な精度で予測できない。そこで本研究では、航空エンジンディスクに多く使用される Ti-6Al-4V 鍛造材製のディスクを対象に、デジタル画像相関法 (Digital Image Correlation : DIC) によって局所性も考慮した高ひずみ領域までの応力-ひずみ関係を取得した。またこの応力-ひずみ関係を用いた構造解析を行い、応力状態に依存する破断ひずみに基づく延性破壊クライテリアを用いて、過回転バーストに至る終局限界評価を実施した。

2. 応力ひずみ関係

2.1 引張試験の DIC 計測

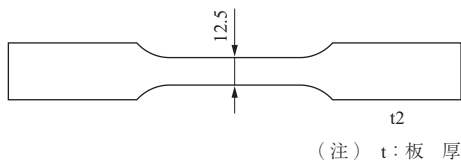
Ti-6Al-4V 鍛造材の高ひずみ領域における応力ひずみ関係を取得するためには、試験片がネッキングしてから破断するまでの高ひずみ領域におけるひずみ計測が必要となる。ひずみゲージや伸び計では、取り付け位置や計測領域の大きさ、計測可能なひずみの上限が問題となり、破断までの局所的なひずみを取得することが困難であった。そこ

で、本研究では DIC を用いて引張試験における破断までのひずみ計測を実施した。DIC はグレースケールデジタル画像分析によって画像上で変位量を計測し、非接触でひずみ分布を得る手法である。

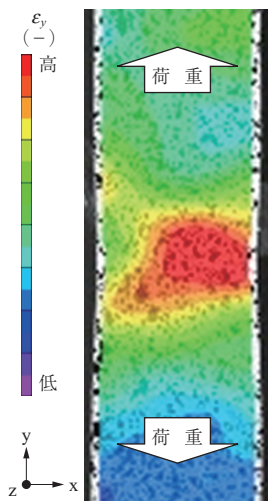
本研究の引張試験の DIC 計測で使用した板厚 2 mm、平行部幅 12.5 mm の平滑平板試験片の形状を第 1 図に示す。事前にディスクの予備解析を行いバースト時に重要となるひずみ速度を確認し、ひずみ速度を $0.000\ 1\ \text{s}^{-1}$ から $1\ \text{s}^{-1}$ まで変更して、引張試験を実施した。代表的な DIC 計測結果を第 2 図に示す。試験片ネッキング部で局所的に集中したひずみを計測できていることが確認できた。ひずみ速度 $0.01\ \text{s}^{-1}$ 以上では、十分なフレームレートを確保するために高速度カメラを用いて画像を撮影した。

2.2 真応力-真ひずみ関係の作成

DIC で得たひずみ分布を用いて真応力と真ひずみを取得した。第 2 図に示したようにひずみに局所性があるため、本研究ではネッキング部の断面における平均ひずみと平均応力を求めることで真応力-真ひずみ関係を決定した⁽²⁾。まず、DIC によって得られた最終破断位置における軸方向ひずみ ε_y を幅方向に平均化したひずみ $\bar{\varepsilon}_y$ を求め、これを真ひずみ ε_T とした。



第 1 図 平滑平板試験片 (単位: mm)
Fig. 1 Smooth flat plate test specimen (unit: mm)



第 2 図 DIC 計測結果
Fig. 2 Strain distribution obtained by DIC measurement

$$\varepsilon_T = \bar{\varepsilon}_y = \frac{1}{W} \int_w \varepsilon_y dx \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 W は平行部の幅であり、 x はその方向である。

一方、真応力を取得するにはネッキング時の断面積の変化を考慮する必要がある。断面積の計算には板厚の情報が必要であるが、板厚方向の変形量は DIC 計測では取得できない。そこで、軸方向と幅方向の変形量と体積一定の仮定を用いて断面積を取得した。まず、(1) 式の平均化した軸方向ひずみ $\bar{\varepsilon}_y$ に加えて、最終破断位置における幅方向ひずみ ε_x を幅方向に平均化したひずみ $\bar{\varepsilon}_x$ を取得する。

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{W} \int_w \varepsilon_x dx \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、塑性変形中の体積は一定と考えることで、板厚方向の平均的なひずみ $\bar{\varepsilon}_z$ は以下のように求めることができる。

$$\bar{\varepsilon}_z = \frac{1}{(1 + \bar{\varepsilon}_x)(1 + \bar{\varepsilon}_y)} - 1 \quad \dots\dots\dots (3)$$

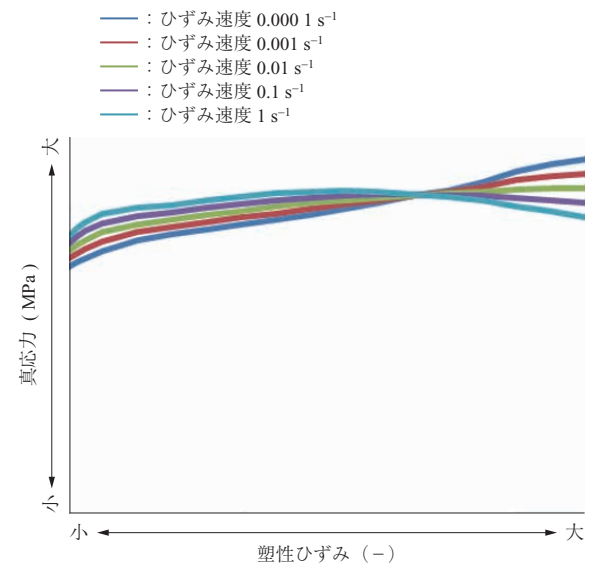
よって、ネッキング部の断面積 A は、初期断面積 A_0 を用いて、(4) 式のように求めることができる。

$$A = A_0(1 + \bar{\varepsilon}_x)(1 + \bar{\varepsilon}_z) \quad \dots\dots\dots (4)$$

本研究では、DIC 計測結果を用いて (4) 式から計算された断面積 A によって試験機荷重 F を除することで、真応力 σ_T を取得した。

$$\sigma_T = F / A \quad \dots\dots\dots (5)$$

引張試験によって得られた真ひずみ (塑性ひずみ ε_p) と真応力の関係を第 3 図に示す。



第 3 図 Ti-6Al-4V 鍛造材の真応力-真ひずみ関係
Fig. 3 True stress-true strain relationship of forged Ti-6Al-4V

3. 延性破壊クライテリア

3.1 応力三軸度と Lode 角パラメータ

金属の延性破壊は、金属材料中の介在物やマイクロなボイドを起点として、応力が加わることによってボイドが成長、連結し、延性亀裂を形成することで引き起こされる^{(3),(4)}。このボイドの成長や連結には応力三軸度が深くかかわっており、破断ひずみに大きな影響を与える。ここで、応力三軸度 η は、静水圧応力 σ_m と Mises の相当応力 σ_{eq} の比で表され、応力の三軸性を示す。主応力 3 成分 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を用いることで、応力三軸度 η は (6) 式で表される。

$$\eta = \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3}{\sqrt{1/2\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}}} \dots\dots\dots (6)$$

また、Lode 角パラメータ $\hat{\theta}$ は主応力空間内における応力の方位として定義される Lode 角 θ_L を正規化した値であり、純せん断状態への近さを表す指標である。Lode 角パラメータ $\hat{\theta}$ は、偏差応力の第 2 不変量 J_2 と第 3 不変量 J_3 を用いて (7) 式で定義され、純せん断のときに 0、一軸引張もしくは等二軸圧縮のときに 1、一軸圧縮もしくは等二軸引張のときに -1 となる⁽⁵⁾。

$$\hat{\theta} = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right) \dots\dots\dots (7)$$

この Lode 角パラメータと応力三軸度によって応力状態を一意に表せる。Bai らは (8) 式で記述される New Fracture Locus Function (NFLF) によって、破断ひずみを応力三軸度 η と Lode 角パラメータ $\hat{\theta}$ の関数 $\epsilon_f^{NFLF}(\eta, \hat{\theta})$ として表すことができるとしている⁽⁶⁾。

$$\epsilon_f^{NFLF}(\eta, \hat{\theta}) = \left[\frac{1}{2}(D_1 e^{-D_2 \eta} + D_5 e^{-D_6 \eta}) - D_3 e^{-D_4 \eta} \right] \hat{\theta}^2 + \frac{1}{2}(D_1 e^{-D_2 \eta} + D_5 e^{-D_6 \eta}) \hat{\theta} + D_3 e^{-D_4 \eta} \dots (8)$$

ここで、 D_1 から D_6 は NFLF の六つの未定材料定数である。NFLF は破断ひずみの応力三軸度および Lode 角パラメータ依存性を高い自由度で表現できるため、本研究ではこれを用いることにした。

負荷中に生じる相当塑性ひずみ増分 $d\epsilon_p$ と NFLF で得られる破断ひずみ $\epsilon_f^{NFLF}(\eta, \hat{\theta})$ の比率を損傷度増分 dD と

定義する。ところで、前述のとおり金属の延性破壊では負荷中の材料内で生じたマイクロなボイドが成長し、連結することで延性亀裂となる。ボイドの成長は、負荷過程で塑性ひずみ ϵ_p が増加する各時刻における応力三軸度 η と Lode 角パラメータ $\hat{\theta}$ の影響を受ける。そこで本研究では、負荷過程の応力三軸度および Lode 角パラメータの変化履歴を考慮するために、(9) 式のように負荷中の dD を積分して表される損傷度 D を用いて、 $D = 1.0$ で延性破壊が発生するとして、これをクライテリアに用いることにした⁽⁷⁾。

$$D = \int dD = \int \frac{d\epsilon_p}{\epsilon_f^{NFLF}(\eta, \hat{\theta})} \dots\dots\dots (9)$$

以降では、本クライテリアを NFLF 破壊クライテリアと記述する。

3.2 クーポン試験の実施

バースト挙動の予測のためには、ディスクで生じる範囲の応力三軸度と Lode 角パラメータにおける破断ひずみの取得が必要となる。そこで、Ti-6Al-4V 鍛造材を用いてさまざまな負荷形態、試験片形状におけるクーポン試験を実施した。本研究で実施した 22 種類のクーポン試験を第 1 表に示す。第 1 表には 3.3 節で後述する解析で得られた

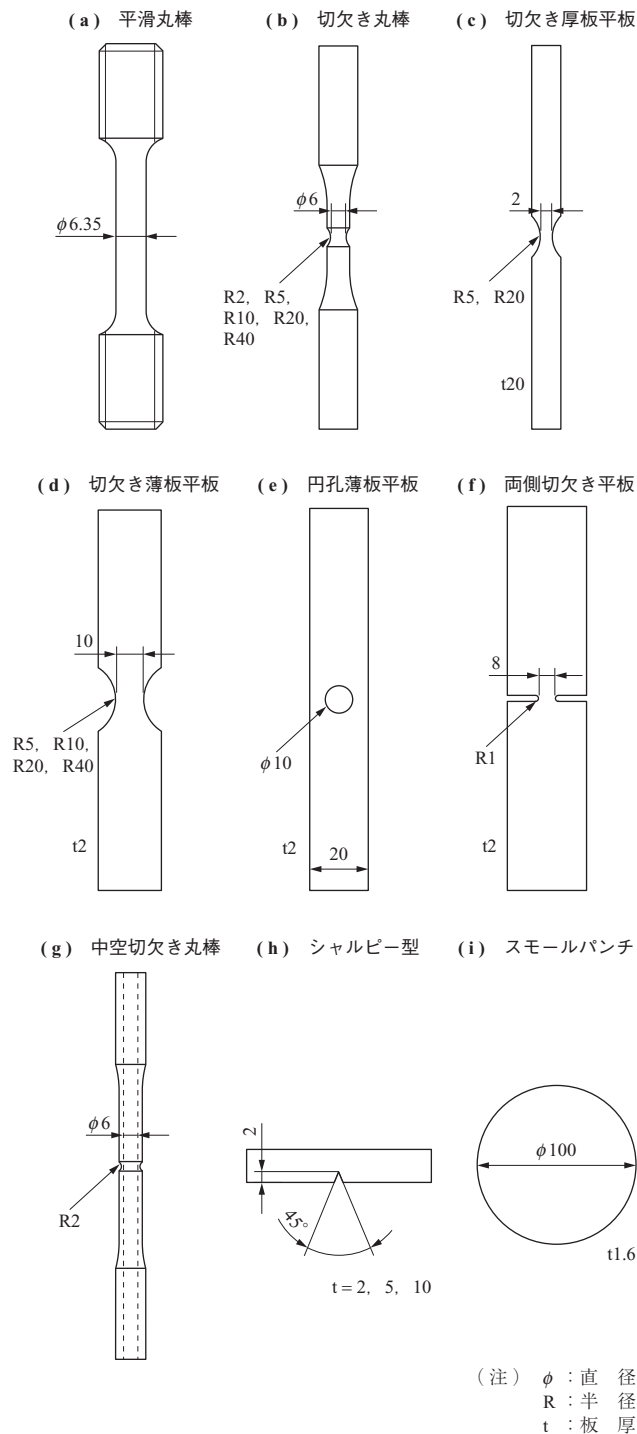
第 1 表 クーポン試験の一覧
Table 1 List of coupon tests

試 験 方 法	Ave. η	Ave. $\hat{\theta}$
	(-)	(-)
平滑丸棒試験片	0.42	1.00
切欠き丸棒試験片 (R2 mm)	1.16	1.00
切欠き丸棒試験片 (R5 mm)	0.87	1.00
切欠き丸棒試験片 (R10 mm)	0.69	1.00
切欠き丸棒試験片 (R20 mm)	0.58	1.00
切欠き丸棒試験片 (R40 mm)	0.52	1.00
切欠き厚板平板試験片 (R5 mm)	0.76	0.05
切欠き厚板平板試験片 (R20 mm)	0.64	0.11
切欠き薄板平板試験片 (R5 mm)	0.56	0.26
切欠き薄板平板試験片 (R10 mm)	0.50	0.49
切欠き薄板平板試験片 (R20 mm)	0.44	0.67
切欠き薄板平板試験片 (R40 mm)	0.40	0.79
円孔薄板平板試験片	0.34	0.96
両側切欠き平板試験片	0.61	-0.05
中空切欠き丸棒試験片 (ねじり 50° + 引張 3.0 mm)	0.23	0.66
中空切欠き丸棒試験片 (ねじり 50° + 引張 2.5 mm)	0.19	0.54
中空切欠き丸棒試験片 (ねじり 50° + 引張 1.5 mm)	0.11	0.32
中空切欠き丸棒試験片 (ねじり 50° + 引張 0.0 mm)	0.00	0.00
シャルピー型試験片 (t2 mm)	0.68	0.41
シャルピー型試験片 (t5 mm)	0.74	0.12
シャルピー型試験片 (t10 mm)	0.76	0.05
スモールパンチ試験片	0.66	-1.00

(注) R : 半 径
t : 板 厚

各試験片の応力三軸度と Lode 角パラメータも記載している。また、各試験片の形状を第 4 図に示す。クーポン試験の事前の予備解析を行い、NFLF の六つの未定材料定数を決定でき、かつ広範囲の応力三軸度と Lode 角パラメータにおける破断ひずみを取得できるように、試験条件を決定した。

丸棒試験片や平板試験片では、試験片の破断まで一定の速度で引張変位を負荷した。切欠きの形状を丸棒試験片で



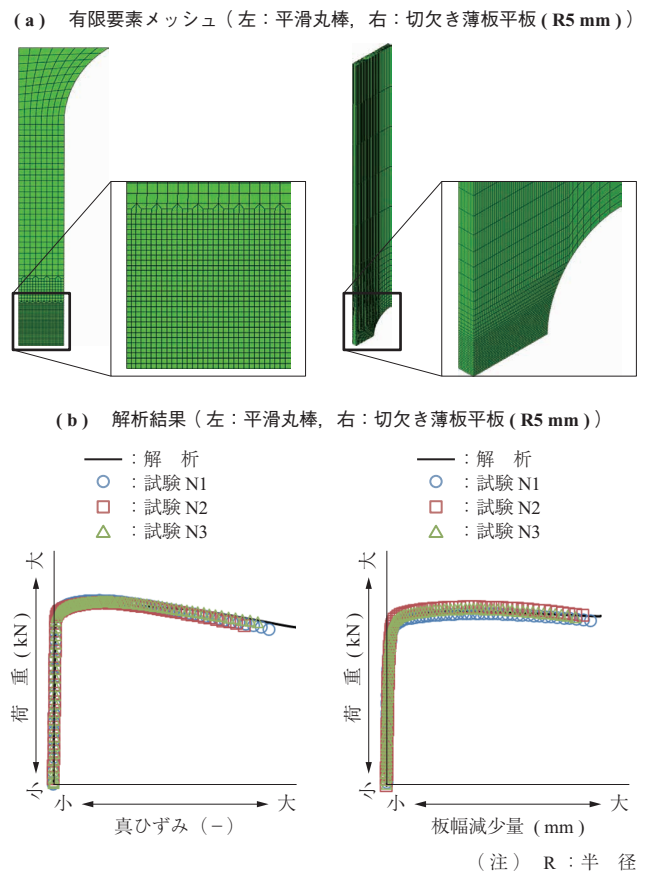
第 4 図 クーポン試験片 (単位: mm)
Fig. 4 Coupon test specimens (unit: mm)

は 5 種類、厚板平板試験片では 2 種類、薄板平板試験片では 4 種類用いることで、応力状態を制御した。中空切欠き丸棒試験片では、引張とねじりの 2 種類の変位を同時に負荷し、その比率を変更することで応力三軸度と Lode 角パラメータを制御しながら負荷した。シャルピー型試験片では先行研究⁽⁸⁾を参考に、スパン 40 mm の 3 点曲げ試験の途中止めと断面組織観察から、延性亀裂発生時の変形量を取得した。スモールパンチ試験片では、φ50 mm の鋼球を試験片に押し込むことで、等二軸引張応力の状態で負荷した。

3.3 クーポン試験の解析

クーポン試験の有限要素解析を実施した。ここで、Ti-6Al-4V 鍛造材の材料構成則として、2 章で構築した真応力-真ひずみ関係を用いた。

解析に用いた代表的な有限要素モデルを第 5 図に示す。丸棒試験片と中空切欠き丸棒試験片、スモールパンチ試験片は、軸対称ソリッド要素を用いてモデル化した。切欠き厚板や切欠き薄板などの平板試験片やシャルピー型試験片は、三次元ソリッド要素によってモデル化した。いずれの有限要素モデルにおいても、評価部近傍のメッシュサイズ



第 5 図 代表的なクーポン試験片の有限要素メッシュと解析結果
Fig. 5 Finite element meshes and analytical results of representative coupon test specimens

は 0.1 mm に統一した。代表的なクーボン試験の解析で得られた荷重と変形量の関係も第 5 図に示す。解析は試験結果を精度良く再現しており、解析の妥当性が確認された。

解析によって、各クーボン試験の破断までの応力三軸度および Lode 角パラメータを取得した。ここで、負荷過程における応力三軸度 η と Lode 角パラメータ $\hat{\theta}$ の変化履歴を考慮するために、次式で表されるように塑性ひずみ ε_p によって破断ひずみ ε_f までの積分処理を行った後に平均化を施した⁽⁷⁾。

$$\text{Ave. } \eta = \frac{1}{\varepsilon_f} \int_0^{\varepsilon_f} \eta d\varepsilon_p \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{Ave. } \hat{\theta} = \frac{1}{\varepsilon_f} \int_0^{\varepsilon_f} \hat{\theta} d\varepsilon_p \quad \dots\dots\dots (11)$$

(10) 式と (11) 式によって試験片の破断まで平均化した応力三軸度 η と Lode 角パラメータ $\hat{\theta}$ を前述の第 1 表にまとめる。

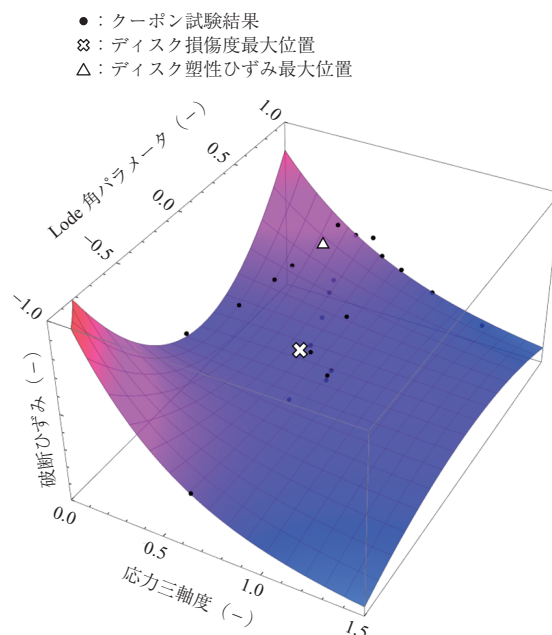
3.4 NFLF で表す破断ひずみの作成

クーボン試験で得られた応力三軸度、Lode 角パラメータと破断ひずみを用いて、NFLF を作成した。(8) 式で表される NFLF の六つの材料定数を決定するために、(12) 式で定義した誤差関数 E を用いた。

$$E = \sum_{\text{TP}} \left\{ \varepsilon_f^{\text{TP}} - \varepsilon_f^{\text{NFLF}}(\eta^{\text{TP}}, \hat{\theta}^{\text{TP}}) \right\}^2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $\varepsilon_f^{\text{TP}}$ 、 η^{TP} 、 $\hat{\theta}^{\text{TP}}$ はクーボン試験の破断ひずみ、応力三軸度、Lode 角パラメータである。(12) 式の誤差関数を最小化するように NFLF の材料定数を求めた。

NFLF を用いて作成した破断ひずみを第 6 図に示す。応力三軸度が低くなると破断ひずみが増加し、特に Lode 角パラメータの絶対値が高いほど、その傾向が強くなることを確認された。また、図中にはクーボン試験の結果を黒丸で表示しており、NFLF による破断ひずみは、クーボン



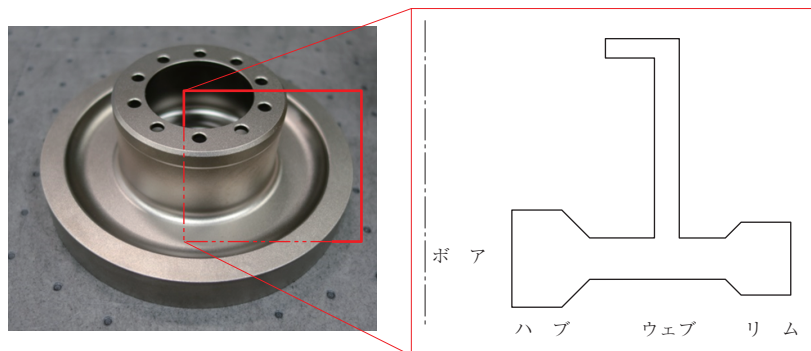
第 6 図 NFLF による Ti-6Al-4V 鍛造材の破断ひずみ
Fig. 6 Failure strain of forged Ti-6Al-4V described by NFNF

試験の結果と精度良く一致していることが確認できる。

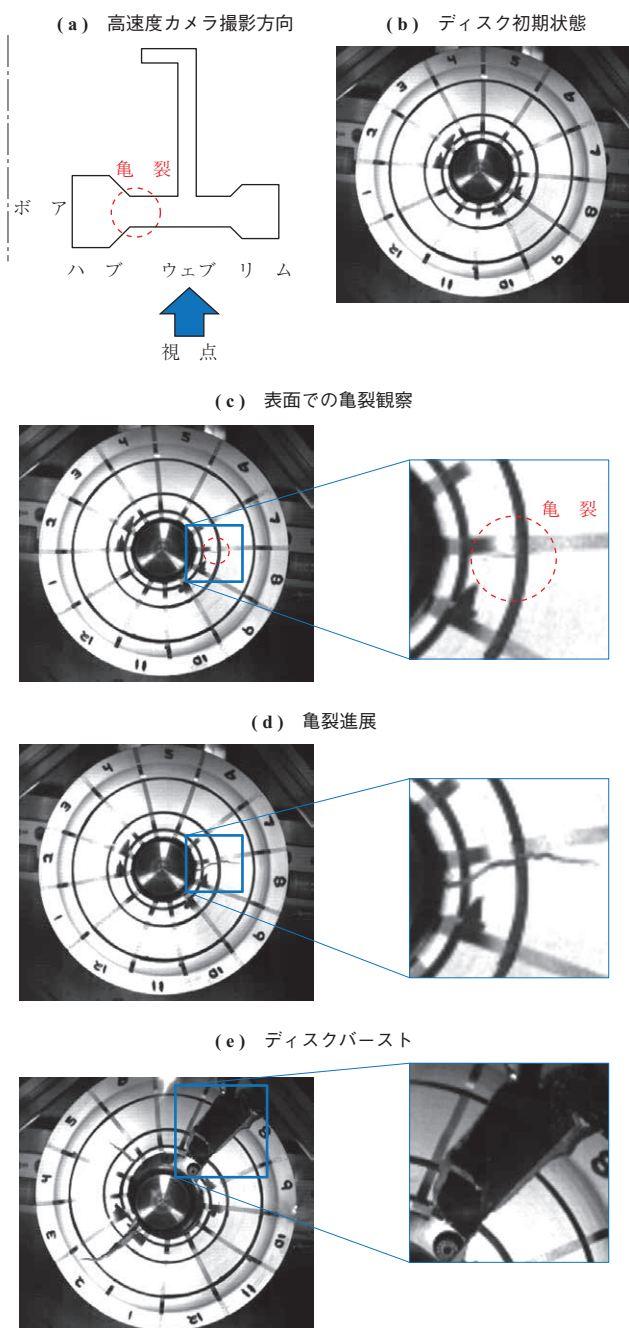
4. ディスクバースト評価

4.1 ディスクバースト試験

試験用の小径ディスクを対象に、バースト試験を実施した。小径ディスクの形状を第 7 図に示す。外径は約 150 mm である。バースト試験では一定の加速度でディスクの回転数を増加させ、ディスクを過回転バーストさせた。試験中は、バースト時刻までのディスク外周部の径方向変位を計測した。高速度カメラによって撮影したバースト試験の写真を第 8 図に示す。第 8 図 - (c) 中のウェブ内径側の点線で囲った領域にて、ディスク表面に周方向に開口した径方向亀裂の存在を確認できた。その後、第 8 図 - (d) において亀裂が外径側に進展し、最終的に - (e) に示すバーストに至った。



第 7 図 小径ディスクの外形
Fig. 7 Outline of a small diameter disk



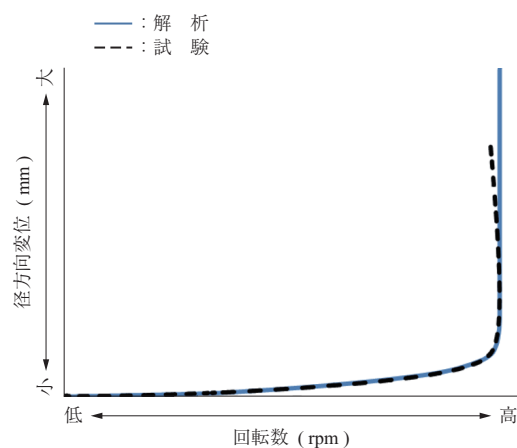
第 8 図 小径ディスクの過回転バースト
Fig. 8 Overspeed burst of a small diameter disk

4.2 ディスクバースト解析

小径ディスクを対象にバースト解析を実施した。軸対称ソリッド要素を用いてモデル化した。Ti-6Al-4V 鍛造材の材料構成則として、2章で構築した真応力-真ひずみ関係を用いた。

4.3 考 察

ディスクバースト試験およびディスクバースト解析で得られた回転数とディスク外周部の径方向変位の関係を第 9 図に示す。バースト試験では、径方向変位の急激な増加に伴う慣性モーメントの急増加に起因して、回転加速度が緩

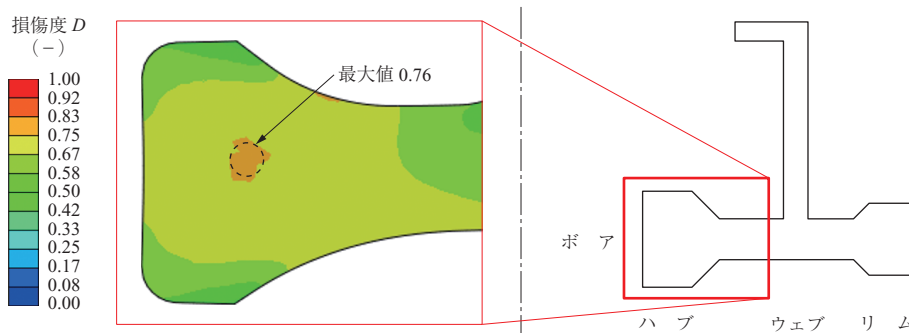


第 9 図 小径ディスクの回転数と径方向変位の関係
Fig. 9 Rotational speed-radial displacement relationship of a small diameter disk

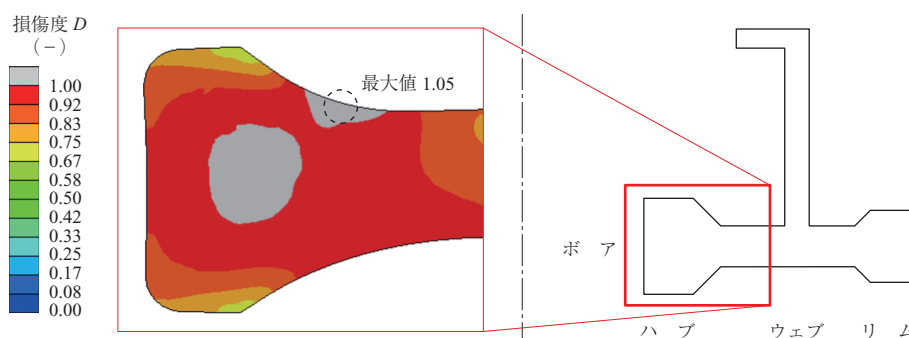
やかに減少して最大回転数に到達し、その後は回転数の低下が生じることが分かった。バースト解析では、回転数の低下までは再現していないものの、最大回転数到達までの変形量を極めて高い精度で予測できることが分かった。

続いて、本ディスクのバースト形態について検討した。バースト解析より、本ディスクにおいて慣性力の増加によってディスク内部で力の釣り合いを満たせなくなり、構造体として成立せずに加速度的な変形増大が生じる構造不安定点が存在することが判明した。この構造不安定点におけるディスク内での破断の有無を検証するために、構造不安定点でのディスクの損傷度分布を確認した結果を第 10 図に示す。損傷度 D が最大となる位置はハブの内部であり、試験で亀裂が観測されたウェブ内径側に近い位置であった。このときの損傷度の最大値は $D = 0.76$ であり、1.0 を下回っていることから構造不安定点で延性破壊が発生していないことが分かった。このことから、本ディスクのバースト形態は構造不安定バーストであることが明らかとなった。

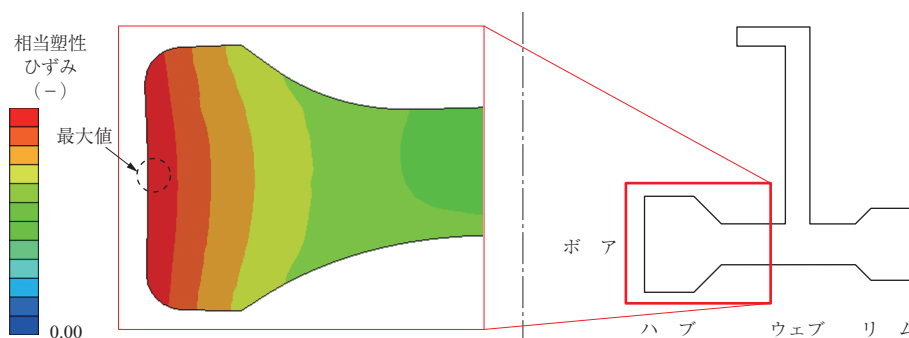
バースト試験で得られた破壊起点を予測できるかを検証する目的で、構造不安定が発生した後に生じる材料の延性破壊について検討した。材料の損傷度 D が 1.0 を超えたときの損傷度分布を第 11 図に示す。損傷度の最大位置は構造不安定発生時点の第 10 図よりも外径側に移動し、ウェブ内径側の表面で最大となった。これは、ディスクバースト試験における亀裂観察部と極めて近い位置であった。ここで、同時刻における相当塑性ひずみの分布を第 12 図に示す。損傷度と異なり、塑性ひずみはボアで最大となっていた。本ディスクにおいて、応力三軸度と Lode 角パラメータの状態がボアとウェブ内径側で異なってお



第 10 図 構造不安定点における損傷度分布
 Fig. 10 Damage distribution when structural instability occurs



第 11 図 延性破壊発生時の損傷度分布
 Fig. 11 Damage distribution when ductile fracture occurs



第 12 図 延性破壊発生時の相当塑性ひずみ分布
 Fig. 12 Equivalent plastic strain distribution when ductile fracture occurs

り、ウェブ内径側において破断ひずみ ϵ_f^{NFLF} が小さくなることで、損傷度 D が最大になることが判明した。

以上より、本研究にて構築した手法を用いることで、ディスクの過回転バーストを対象とした構造解析によって、精度良く終局限界挙動を評価できることが示された。

5. 結 言

Ti-6Al-4V 製のディスクを対象に、過回転バーストに至る終局限界評価手法を構築した。以下に内容をまとめる。

- (1) ネッキングが生じるような高ひずみ領域での真応力-真ひずみ関係を取得するために、DIC による

Ti-6Al-4V 鍛造材の引張試験中のひずみ計測を行った。DIC 計測で得られたひずみ分布から、ネッキング部の真応力-真ひずみ関係を取得した。

- (2) Ti-6Al-4V 鍛造材の延性破壊クライテリアを取得するために、応力三軸度と Lode 角パラメータを制御した 22 種類のクーポン試験を実施した。各クーポン試験結果と有限要素法による解析結果から、応力三軸度と Lode 角パラメータに対応した破断ひずみを同定した。また、これらの結果を用いて、Ti-6Al-4V 鍛造材における NFLF に基づく破壊クライテリアを作成した。

(3) 小径ディスクの過回転バーストを対象に、終局限界評価を行った。DIC を用いて作成した真応力-真ひずみ関係を用いることで、バースト試験で生じる変形量を解析によって極めて高い精度で予測できた。また、NFLF に基づく破壊クライテリアを用いることで、ディスクの破壊起点を精度良く予測できることを示した。

昨今、開発期間の短縮や試験費用の削減のため、Certification by Analysis の議論が活発になっている。航空エンジンの競争力強化のために解析によるディスクの認証取得が望まれており、これを実現するためには本技術を用いた設計手法の確立が必須となる。

参 考 文 献

(1) Federal Aviation Administration, Department of Transportation : The Code of Federal Regulations, Title 14: Aeronautics and Space, Chapter I: Federal Aviation Administration, Department of Transportation, Subchapter C: Aircraft, Part 33: Airworthiness Standards: Aircraft Engines, <https://www.ecfr.gov/current/title-14/chapter-I/subchapter-C/part-33>, (参照 2023. 11. 24)

(2) 川久保政洋, 釜谷昌幸 : 3次元デジタル画像相関法による溶接部における不均一強度分布の同定, 日本機械学会論文集 A 編, 79 巻, 806 号, 2013 年, pp. 1 517 - 1 529

(3) A. A. Benzerga and J. B. Leblond : Ductile fracture by void growth to coalescence, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 44, (2010), pp. 169 - 305

(4) T. Yamada and M. Ohata : Prediction of stress triaxiality dependency of critical strain using mechanical properties for metallic materials, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 199, (2022), 104 752

(5) M. Dunand and D. Mohr : Effect of Lode parameter on plastic flow localization after proportional loading at low stress triaxialities, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 66, (2014), pp. 133 - 153

(6) Y. Bai and T. Wierzbicki : A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence, *International Journal of Plasticity*, Vol. 24, Iss. 6, (2008), pp. 1 071 - 1 096

(7) T. Wierzbicki, Y. Bao, Y. W. Lee and Y. Bai : Calibration and evaluation of seven fracture models, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 47, Iss. 4 - 5, (2005), pp. 719 - 743

(8) 廣田 佳, 多谷大輔, 庄司博人, 大畑 充, 今井康人, 坂上貴士 : マルチモード延性き裂進展挙動予測のための延性損傷数理モデル, 溶接構造シンポジウム 2017 講演論文集, 2017 年, pp. 465 - 472