

# セラミックス基複合材料の静的引張時の材料挙動予測

## Prediction of Material Behavior of Ceramic Matrix Composites under Static Tension Loading

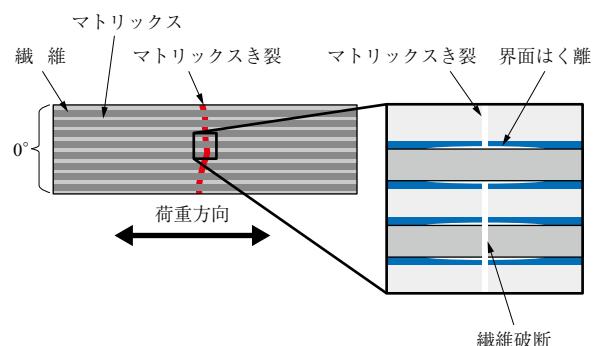
春 山 大 地 機械開発本部技術基盤センター材料・構造技術部 博士（工学）

航空機の燃費向上には、高温・高強度セラミックス基複合材料(CMC)のエンジン部品への適用が必要であり、材料特性の向上とともに構造強度の高精度予測、破壊メカニズムの理解が重要である。本研究では、一方向CMCの繊維方向における静的引張荷重時の損傷モデルを構築し、一方向CMCの材料挙動を精度良く予測すること目的とした。構築したマトリックスき裂成長モデルおよび繊維破断モデルを用いることで、試験で得られた応力-ひずみ関係、およびき裂密度-応力関係を高い精度で予測することが可能となった。

Improving aircraft fuel efficiency requires the application of high-temperature and high-strength ceramic matrix composites (CMCs) to engine components, necessitating enhanced material properties, highly accurate structural strength predictions, and a thorough understanding of fracture mechanisms. In this study, damage models under static tensile loading in the fiber direction of unidirectional CMCs were constructed to enable precise prediction of the material behavior of unidirectional CMCs. By employing both a matrix crack growth and a fiber breakage model, it is possible to accurately predict the stress-strain relationship and the crack density-stress relationship obtained in experiments.

### 1. 緒 言

近年、航空機分野において、持続可能な社会の実現のため、環境負荷を低減させる要求が高まっている。環境負荷低減に向けた取組みの一つとして、燃費改善に向けた技術開発が行われている。燃費改善を実現するための方法として、タービン入口温度の高温化や航空機の軽量化が挙げられる。これらの燃費改善の方法に貢献できる技術として、エンジン部品へのセラミックス基複合材料(Ceramic Matrix Composite : CMC)の適用が挙げられる。現在までにさまざまなエンジン部品への適用を目指した研究開発が進んでおり、さらなる燃費向上のために、より高温な環境下で適用可能で高強度なCMCの開発が必要である。そのためには、材料の特性改善や強度の正確な予測が必要となる。材料特性を改善するためには、単体の材料特性を向上させる以外に、素材の適切な組合せが重要であり、正確な強度予測には破壊現象を十分に理解する必要がある。よって、CMCの繊維、界面層、マトリックスといった素材の破壊現象をモデル化することで、複合材料の挙動を適切に予測することが重要である。ここで、一方向CMCの微視的損傷を第1図に示す。一方向CMCは繊維方向に負荷を加えたときに、マトリックスき裂が発生するが、CMC全体がぜい性的に破壊しないために、マトリックスき裂が繊維に進展せず、繊維とマトリックスの界面にき裂



第1図 一方向CMCの損傷の様子  
Fig. 1 Schematic of damages in unidirectional CMCs

が偏向し、界面がはく離するように設計されている。さらに負荷を加えると、マトリックスき裂が複数箇所で発生し、繊維とマトリックス間の界面はく離領域が増え、やがてマトリックスき裂は発生しなくなる。また繊維は、強度的に弱い箇所から局所的に破壊し、繊維全体が負荷に耐えられなくなったときに破断する。これらの微視的損傷が成長することで、力学特性が変化する。

そこで本研究では、一方向CMCの繊維方向への静的引張時の損傷モデルを構築し、一方向CMCの材料挙動(応力-ひずみ関係、き裂成長過程)を精度良く予測すること目的とした。構築した損傷モデルで計算を行い、計算結果と試験結果を比較することで損傷モデルの妥当性検証を行った。

## 2. ランダムなマトリックスき裂成長モデル

### 2.1 マトリックスき裂発生によるエネルギー解放率

マトリックスき裂成長を模擬するために必要なマトリックスき裂発生によるエネルギー解放率を示す。第2図に既存のマトリックスき裂間に発生する新たなマトリックスき裂を示す。新たなマトリックスき裂が発生したときのエネルギー解放率  $d\bar{\xi}_m^I$  は(2-1)～(2-6)式となる<sup>(1)</sup>。

$$d\bar{\xi}_m^I = \bar{\xi}_0 + 3\bar{\xi}_0 \frac{\sigma_{deb}}{\sigma_1 + \sigma_{th} - \sigma_{deb}} \quad \dots \quad (2-1)$$

$$\begin{aligned} d\bar{\xi}_m^{II} &= \bar{\xi}_0 \left[ 1 - 2 \left( 1 - \frac{x_{1+}}{2\delta} \right)^3 \right] \\ &+ 3\bar{\xi}_0 \frac{\sigma_{deb}}{\sigma_1 + \sigma_{th} - \sigma_{deb}} \left[ -2 \left( \frac{x_{1+}}{2\delta} \right)^2 + 4 \left( \frac{x_{1+}}{2\delta} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad \dots \quad (2-2)$$

$$\begin{aligned} d\bar{\xi}_m^{III} &= \bar{\xi}_0 \left[ -6 \left( \frac{x_{1+}}{2\delta} \right)^3 + 6 \left( \frac{x_{1+}}{2\delta} \right)^2 \right] \\ &+ 3\bar{\xi}_0 \frac{\sigma_{deb}}{\sigma_1 + \sigma_{th} - \sigma_{deb}} \left[ 2 \left( \frac{x_{1+}}{2\delta} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad \dots \quad (2-3)$$

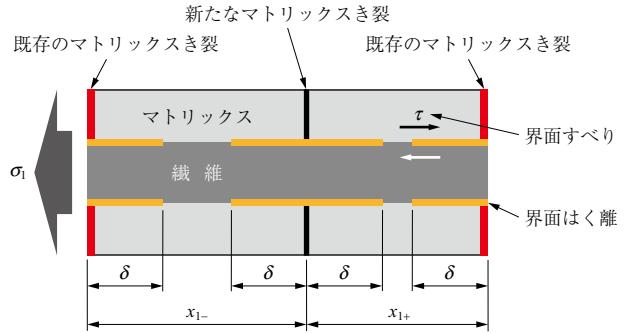
$$\begin{aligned} d\bar{\xi}_m^{IV} &= \bar{\xi}_0 \left[ 1 - 2 \left\{ \left( 1 - \frac{x_{1+}}{2\delta} \right)^3 + \left( 1 - \frac{x_{1-}}{2\delta} \right)^3 \right\} \right] \\ &+ 3\bar{\xi}_0 \frac{\sigma_{deb}}{\sigma_1 + \sigma_{th} - \sigma_{deb}} \left[ -2 \frac{x_{1+}^2 + x_{1-}^2}{(2\delta)^2} + 4 \frac{x_{1+} + x_{1-}}{2\delta} - 3 \right] \end{aligned} \quad \dots \quad (2-4)$$

$$\begin{aligned} d\bar{\xi}_m^V &= \bar{\xi}_0 \left[ -6 \left( \frac{x_{1+}}{2\delta} \right)^3 + 6 \left( \frac{x_{1+}}{2\delta} \right)^2 + 2 \left( \frac{x_{1-}}{2\delta} \right)^3 \right. \\ &\quad \left. - 6 \left( \frac{x_{1-}}{2\delta} \right)^2 + 6 \frac{x_{1-}}{2\delta} - 2 \right] \\ &+ 3\bar{\xi}_0 \frac{\sigma_{deb}}{\sigma_1 + \sigma_{th} - \sigma_{deb}} \left[ 2 \left( \frac{x_{1+}}{2\delta} \right)^2 - 2 \left( \frac{x_{1-}}{2\delta} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{x_{1-}}{2\delta} - 2 \right] \end{aligned} \quad \dots \quad (2-5)$$

$$d\bar{\xi}_m^{VI} = \bar{\xi}_0 \left[ -2 \left( \frac{x_{1+}}{2\delta} \right)^3 + 6 \left( \frac{x_{1-}}{2\delta} \right) \left( \frac{x_{1+}}{2\delta} \right)^2 \right] \quad \dots \quad (2-6)$$

$$\bar{\xi}_0 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_{th} - \sigma_{deb})^3 V_m^2 E_m^2 r_f}{6 V_f^2 E_f \tau E_1^2} \quad \dots \quad (2-7)$$

$$\delta = \frac{V_m E_m}{V_f E_1} \frac{r_f}{2\tau} (\sigma_1 + \sigma_{th} - \sigma_{deb}) \quad \dots \quad (2-8)$$



第2図 既存のマトリックスき裂間に発生する新たなマトリックスき裂

Fig. 2 New matrix crack initiation between pre-existing matrix cracks

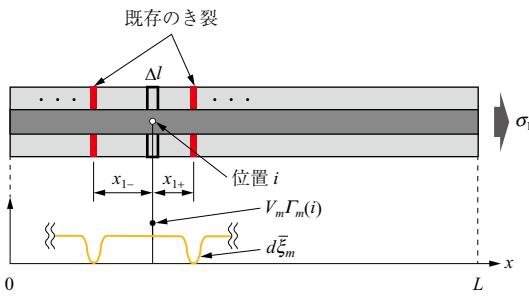
$$\begin{aligned} \sigma_{th} &= V_f E_f (\alpha_f - \alpha_m)(T - T_0) \\ &= V_f E_f (\alpha_f - \alpha_m) \Delta T \end{aligned} \quad \dots \quad (2-9)$$

$$\sigma_{deb} = 2V_f \sqrt{\frac{E_f E_1 \Gamma_d}{V_m E_m r_f}} \quad \dots \quad (2-10)$$

ここで、 $\bar{\xi}_0$  は基準エネルギー解放率、 $\sigma_1$  は引張応力、 $\sigma_{th}$  は熱残留応力、 $\sigma_{deb}$  は界面はく離応力、 $x_{1+}$  と  $x_{1-}$  は隣接き裂からの距離、 $\delta$  は界面はく離長さ、 $r_f$  は繊維半径、 $\tau$  は界面摩擦応力、 $V_f$  は一方向複合材料の繊維含有率、 $V_m$  は一方向複合材料のマトリックス含有率、 $E_f$  は繊維の縦弾性係数、 $E_m$  はマトリックスの縦弾性係数、 $E_1$  は一方向複合材料の繊維方向の縦弾性係数、 $\alpha_f$  は繊維の熱膨張係数、 $\alpha_m$  はマトリックスの熱膨張係数、 $T$  は温度、 $T_0$  は熱残留応力が 0 のときの温度、 $\Gamma_d$  は界面はく離の臨界エネルギー解放率である。上付き文字 I～VI はマトリックスき裂の相対位置および界面はく離領域のオーバーラップによる場合分けを示している<sup>(2)</sup>。ケース I～V は Zok と Spearing<sup>(2)</sup> の式に新たに熱残留応力  $\sigma_{th}$  と界面はく離応力  $\sigma_{deb}$  の影響として第2項目を追加した式であり、ケース VI は Zok と Spearing の式と一致した。

### 2.2 モンテカルロ法を用いたマトリックスき裂成長計算

2.1節で定式化したマトリックスき裂成長モデルとモンテカルロ法を用いて、マトリックスき裂がマトリックス内の局所的な破壊エネルギー（臨界エネルギー解放率）によって発生するという仮定のもと、欠陥のばらつきを考慮した計算モデルを構築し、応力-ひずみ関係とき裂密度を計算した。計算モデルを第3図に示す。繊維方向に長さ  $L$  を有する計算領域を考え、発生するき裂は計算領域を貫通するものとした。この計算領域を繊維方向に  $N$  個に分割し、各位置の要素のサイズを  $\Delta l = L/N$  とした。また位置  $i$ において、隣接き裂からの距離を  $x_{1+}$ 、 $x_{1-}$  とし、界面はく離長さ  $\delta$  とき裂の相対位置に応じて、(2-1)～



第3図 計算モデル  
Fig. 3 Computational model

(2-6)式を用いて、マトリックスき裂発生によるエネルギー解放率  $d\bar{\xi}_m$  を計算した。なお、(2-2)～(2-6)式は条件  $x_{l+} \leq x_{l-}$  で得られた結果であるが、 $x_{l+} > x_{l-}$  の場合には、 $x_{l+}$  と  $x_{l-}$  を入れ替えればよい。また、マトリックスき裂は(2-11)式を満たしたときに発生するものとした。

$$d\bar{\xi}_m \geq V_m \Gamma_m(i) \quad \dots \quad (2-11)$$

ここで、 $\Gamma_m(i)$  は位置  $i$  のマトリックスの破壊エネルギーであり、欠陥の分布に依存すると考えられる。ここで、マトリックスの破壊エネルギーのはらつきをワイブル分布に基づき与えた。具体的には、(2-12)式のワイブル分布  $R_i$  を用い、逆関数法によって一様分布に従う乱数からワイブル分布の乱数を生成し、各位置の破壊エネルギー  $\Gamma_m(i)$  を算出した。

$$R_i = 1 - \exp \left( -\frac{\Delta V}{V_{m0}} \left( \frac{\Gamma_m(i)}{\Gamma_{ms}} \right)^{\Gamma_{mg}} \right) \quad \dots \quad (2-12)$$

ここで  $\Gamma_{ms}$  は尺度パラメータ、 $\Gamma_{mg}$  は形状パラメータ、 $V_{m0}$  は参照体積、 $\Delta V$  は分割した要素の体積である。なお、体積は試験片の幅で割った単位幅の体積とし、参照体積  $V_{m0}$  は(2-13)式に従うものとした。

$$V_{m0} = L \times b_r \times V_m \quad \dots \quad (2-13)$$

ここで、 $b_r$  は参照厚さである。また、分割した要素の体積  $\Delta V$  は、(2-14)式のとおりである。

$$\Delta V = \Delta l \times b_r \times V_m \quad \dots \quad (2-14)$$

また、き裂密度  $\rho_1$  はき裂数  $n$  と長さ  $L$  から(2-15)式のとおり求めた。

$$\rho_1 = \frac{n}{L} \quad \dots \quad (2-15)$$

さらに計算領域全体の平均ひずみ  $\epsilon_1$  は、各位置  $i$  の繊維ひずみ  $\epsilon_f^m(i)$  を求め、それを平均化した値とした。

$$\epsilon_1 = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^N \epsilon_f^m(i) \Delta l \quad \dots \quad (2-16)$$

なお、各位置  $i$  の繊維ひずみ  $\epsilon_f^m(i)$  は隣接き裂からの距離  $x_{l+}$ 、 $x_{l-}$  を考慮し、(2-17)～(2-20)式を用いて計算した<sup>(1)</sup>。

$$\epsilon_f^m(i) = \epsilon_1^0 \quad \text{for } x_{l+} \geq \delta \text{ and } x_{l-} \geq \delta \quad \dots \quad (2-17)$$

$$\epsilon_f^m(i) = (1 + \beta) \epsilon_1^0 - \beta (\epsilon_1^m + \epsilon_{th} - \epsilon_{deb}) \frac{x_{l-}}{\delta} + \beta \epsilon_{th} \quad \text{for } x_{l-} \leq x_{l+} \text{ and } x_{l-} < \delta \quad \dots \quad (2-18)$$

$$\epsilon_f^m(i) = (1 + \beta) \epsilon_1^0 - \beta (\epsilon_1^m + \epsilon_{th} - \epsilon_{deb}) \frac{x_{l+}}{\delta} + \beta \epsilon_{th} \quad \text{for } x_{l-} \geq x_{l+} \text{ and } x_{l+} < \delta \quad \dots \quad (2-19)$$

$$\beta = \frac{V_m E_m}{V_f E_f} \quad \dots \quad (2-20)$$

ここで、 $\epsilon_1^0$  は損傷がない場合の一方向複合材料のひずみ、 $\epsilon_{th}$  は熱ひずみ、 $\epsilon_{deb}$  は界面はく離に伴うひずみであり、(2-21)～(2-23)式となる。

$$\epsilon_1^0 = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad \dots \quad (2-21)$$

$$\epsilon_{th} = \frac{\sigma_{th}}{E_1} \quad \dots \quad (2-22)$$

$$\epsilon_{deb} = \frac{\sigma_{deb}}{E_1} \quad \dots \quad (2-23)$$

また、 $\beta$  は繊維とマトリックスに関する材料定数である。

### 2.3 計算に用いるパラメータ

計算モデルの妥当性を確認するために、炭化けい素(SiC)繊維とCAS(Calcium Alumino-Silicate)マトリックスで構成された一方向CMC積層板[0]<sub>12</sub>の試験結果<sup>(3), (4)</sup>を用いた。計算モデルは  $L = 10$  mm,  $N = 10,000$ , 最大応力  $\sigma_{1max} = 400$  MPaとした。材料パラメータを第1表に示す。参照厚さ  $b_r$  は試験片の厚さとした。本計算モデルでは、他にマトリックスの破壊エネルギーに関するパラメータ  $\Gamma_{ms}$  と  $\Gamma_{mg}$ 、界面はく離エネルギー  $\Gamma_d$ 、界面せ

第1表 一方向SiC/CAS複合材料のパラメータ

Table 1 Parameters of unidirectional SiC/CAS composites

記号	説明	値	単位
$E_f$	繊維のヤング率	$190^{(3), (4)}$	GPa
$\alpha_f$	繊維の熱膨張係数	$3.3 \times 10^{-6}^{(3), (4)}$	K <sup>-1</sup>
$E_m$	マトリックスのヤング率	$90^{(3), (4)}$	GPa
$\alpha_m$	マトリックスの熱膨張係数	$4.6 \times 10^{-6}^{(3), (4)}$	K <sup>-1</sup>
$V_f$	繊維含有率	$0.34^{(3), (4)}$	—
$\Delta T$	成形時の温度差	$-1,200^{(3)}$	K
$r_f$	繊維半径	$8^{(3)}$	μm
$b_r$	参照厚	$2.1^{(3)}$	mm

**第2表** 各方法によるSiC/CASの界面せん断応力と界面はく離エネルギー

**Table 2** Interface sliding stress and interface debonding energy of SiC/CAS by each method

説明	方 法	値	単位
界面せん断応力 $\tau$	マトリックスき裂応力	10 ~ 15 <sup>(9)</sup>	MPa
	Fiber bundle push-out	14 ~ 19 <sup>(5)</sup>	MPa
	Push-down (Marshallモデルの利用)	29±3 (負荷) <sup>(10), (11)</sup> 21±2 (最負荷)	MPa
界面はく離エネルギー $\Gamma_d$	Fiber bundle push-out	$\approx 0.0$ <sup>(5), (6)</sup>	J/m <sup>2</sup>
	非弾性ひずみ	0.1 <sup>(7)</sup>	J/m <sup>2</sup>
	永久ひずみ	0.3 <sup>(12)</sup>	J/m <sup>2</sup>
	Hysteresis analysis	0.5±0.3 <sup>(6), (8)</sup>	J/m <sup>2</sup>

ん断応力  $\tau$  といった材料パラメータの値が必要となる。界面はく離エネルギーと界面せん断応力の具体的な値を**第2表**に示す。さまざまな計測方法が提案されているが、計測方法によって大きく異なる。そこで各パラメータの値を決定するため、界面はく離エネルギー  $\Gamma_d$  の値を変えて、応力-ひずみ関係とき裂密度-応力関係の計算結果と試験結果が一致するときの界面せん断応力  $\tau$ 、マトリックスの破壊エネルギーに関するパラメータ  $\Gamma_{ms}$  と  $\Gamma_{mg}$  を算出し、パラメータの範囲を絞り込んだ。界面はく離エネルギーの最小値については、繊維束 (fiber bundle) push-out 試験では約 0.0 J/m<sup>2</sup><sup>(5), (6)</sup> としているが、明確な値を示していない。一方で、He らは非弾性ひずみを検討する際に、界面はく離エネルギーとして 0.1 J/m<sup>2</sup><sup>(7)</sup> を用いている。界面はく離エネルギーが 0.0 J/m<sup>2</sup> であると考えにくいため、本研究でも同様に 0.1 J/m<sup>2</sup> を計算に用いた。また、界面はく離エネルギーについては、調査した中で最大値を示した hysteresis analysis による方法の値 (0.8 J/m<sup>2</sup>)<sup>(6), (8)</sup> も計算に用いた。

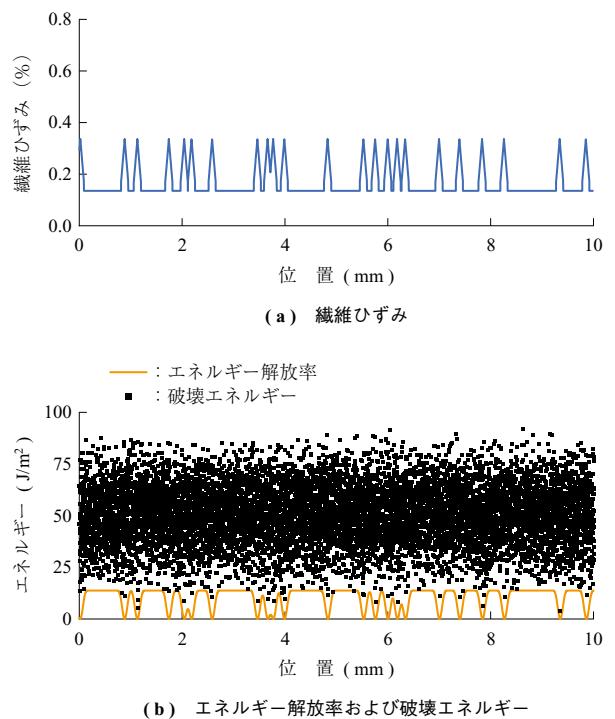
## 2.4 計算結果

**第3表**に試験<sup>(3)</sup>の応力-ひずみ関係とき裂密度-応力関係によく一致するように調整したパラメータを示す。初めにモンテカルロシミュレーションによって、ランダムなマトリックスき裂成長を表現できているか確認した。**第4図**に青色実線の繊維の軸方向ひずみ分布  $\epsilon_f^m$ 、橙色実線のマトリックスのエネルギー解放率  $d\bar{\xi}_m$ 、黒色点群の破壊

**第3表** 各ケースのパラメータ調整結果

**Table 3** Parameter adjustment results for each case

ケース	$\Gamma_d$ (J/m <sup>2</sup> )	$\tau$ (MPa)	$\Gamma_{ms}$ (J/m <sup>2</sup> )	$\Gamma_{mg}$ (-)
1	0.1	18	15	4
2	0.8	13	10	3

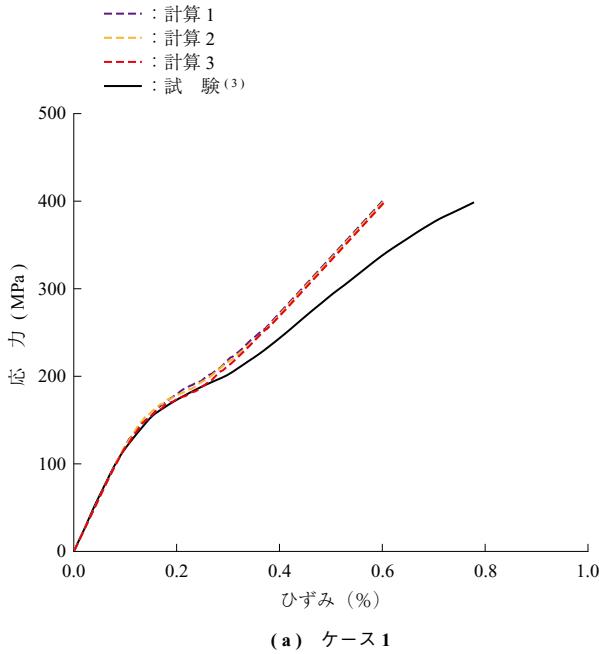


**第4図** 繊維ひずみ、マトリックスのエネルギー解放率、および破壊エネルギー分布

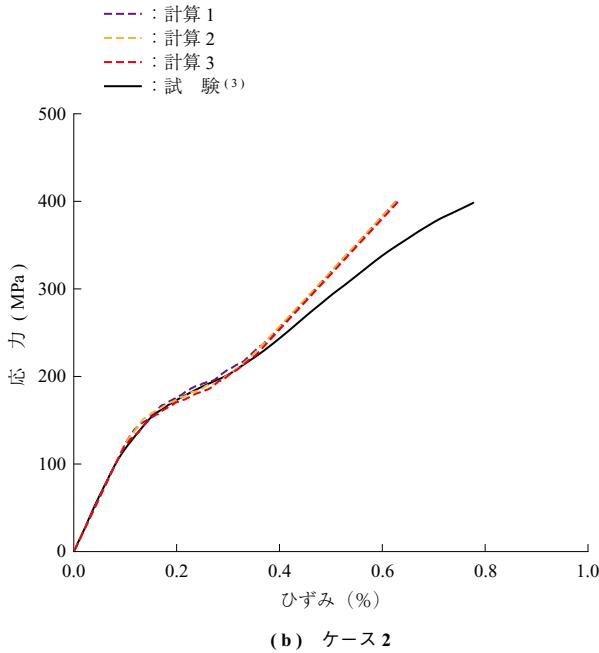
**Fig. 4** Distribution of fiber strain, energy release rate of matrix, and fracture energy

エネルギー  $V_m \Gamma_m$  の分布を示す。ある位置の破壊エネルギーよりもマトリックスのエネルギー解放率が大きくなることでき裂が発生し、マトリックスのエネルギー解放率が低下し、繊維にひずみ分布が発生したことが確認された。このき裂発生によるマトリックスのエネルギー解放率と繊維ひずみの再分配、応力増加が繰り返されることで、ランダムにき裂が成長していることが確認された。

次に、モンテカルロシミュレーションを3回実施して得られた応力-ひずみ関係を**第5図**に、き裂密度-応力関係を**第6図**に示す。応力-ひずみ関係はほぼばらつきは確認されず、き裂密度は試験結果と同程度のばらつきが発生した。よってパラメータを検討するうえで、破壊エネルギーのばらつきは大きな問題にならないことが明らかとなった。また、ケース1、2の応力-ひずみ関係は初期の擬延性領域まで計算結果と試験結果がよく一致し、き裂密度-応力関係はき裂の発生から飽和するまでの過程全体で計算結果と試験結果がよく一致した。しかし、き裂が飽和した後は応力-ひずみ関係が一致しなかった。マトリックスが荷重を負担せず、繊維が健全な場合を仮定すると、 $V_f E_f = 64.6$  GPa となり、試験の接線弾性係数の約 45 GPa と大きく異なった。これは繊維破断を考慮していないためと考えられる。繊維破断は**4章**にて説明する。



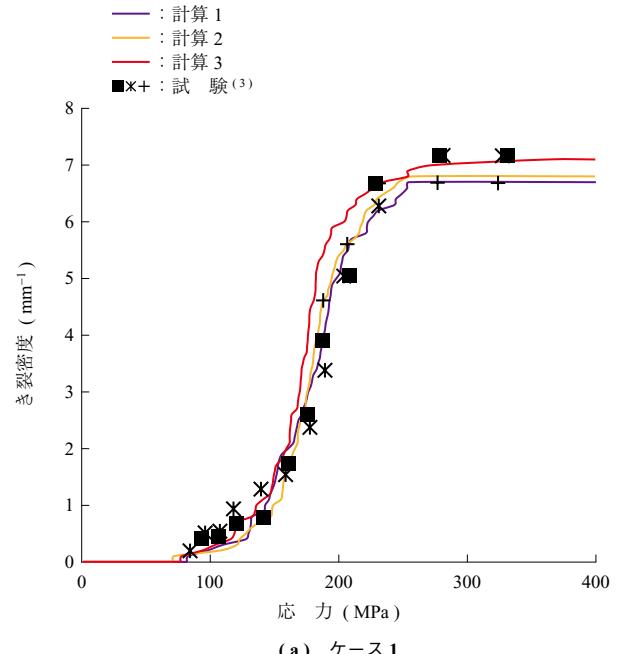
(a) ケース 1



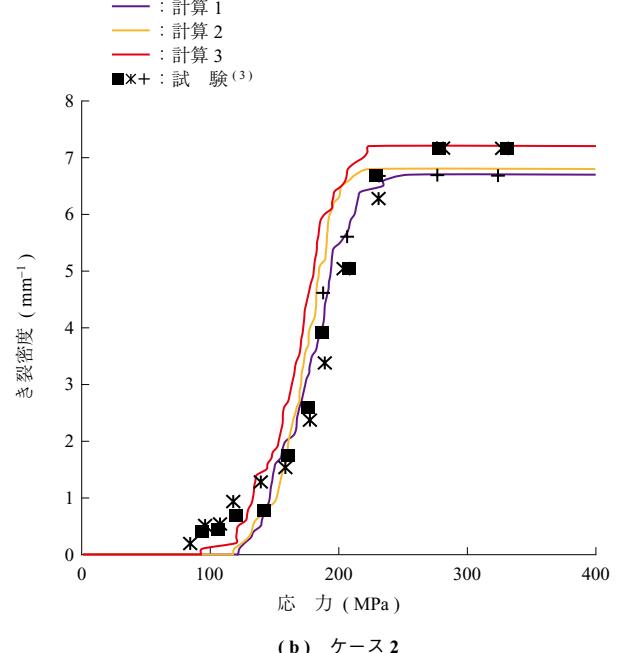
(b) ケース 2

第 5 図 計算と試験で得られた応力 – ひずみ関係  
Fig. 5 Stress-strain curves obtained by calculation and experiment

また、本計算によって、界面はく離エネルギー  $\Gamma_d$ 、界面せん断応力  $\tau$ 、尺度パラメータ  $\Gamma_{ms}$ 、形状パラメータ  $\Gamma_{mg}$  の範囲を狭めたが、今後計算を進めるに当たり、各パラメータの値を決定する必要がある。ここで、あらためて第 5 図の応力 – ひずみ関係と第 6 図のき裂密度 – 応力関係の詳細を確認した。マトリックスき裂成長が確認される応力 200 MPa 近傍はマトリックスき裂に起因する纖維破断による応力低下が計算結果に反映されるため、纖維破断の影響がほとんどない、マトリックスき裂が発生し始めた



(a) ケース 1



第 6 図 計算と試験で得られたき裂密度 – 応力関係  
Fig. 6 Crack density-stress relationships obtained by calculation and experiment

応力 150 MPa 近傍の計算結果と試験結果を確認した。第 5 図の応力 – ひずみ関係においては、ケース 1、2 で明確な差が確認されなかったが、第 6 図のき裂密度 – 応力関係においては、ケース 1 の方が計算結果と試験結果がよく一致した。ケース 2 の場合は、パラメータ調整によってマトリックスき裂の発生応力の計算結果と試験結果を一致させることができず、計算結果の方が試験結果よりも大きくなつた。この理由として、界面はく離エネルギーが大きい点が挙げられる。マトリックスき裂と界面はく離が発

生するとき、荷重負荷によって与えたエネルギーが界面はく離に消費されるため、マトリックスき裂の発生に割り当てられるエネルギーが小さくなる。これによって、計算で得られるマトリックスき裂の発生応力が高くなつたと考えられる。以上の考察から、これ以降の計算ではケース1のパラメータを用いることとした。

### 3. 周期的なマトリックスき裂成長モデル

#### 3.1 計算モデル

2章ではランダムなマトリックスき裂成長モデルを用いることで、マトリックスき裂が飽和する応力 200 MPa 程度までの応力-ひずみ関係、き裂密度-応力関係を表現することが可能になった。しかし、織物複合材や部品で発生するような広範囲での破壊現象を把握するためには、計算コストの観点から、局所的な影響を考慮したランダムな材料挙動を平均的な材料挙動に置き換えたモデルが必要である。そこで、欠陥のばらつきを考慮した周期的なマトリックスき裂成長モデルを定式化し、モンテカルロシミュレーションで得られた応力-ひずみ関係とき裂密度-応力関係と同等の計算結果が得られるか検討した。

初めに、周期的なマトリックスき裂成長モデルとして、第2図において、き裂間の中央に新たなき裂が発生するものと仮定した。この場合のマトリックスき裂によるエネルギー解放率  $d\bar{\xi}_m$  は、界面はく離長さ  $\delta$  とき裂間隔  $\bar{x}_1$  によって変化し、2.1節で示した(2-1), (2-4), (2-6)式を  $x_{1+} = x_{1-} = \bar{x}_1$  とした式となる。ここで、上記の平均き裂間隔  $\bar{x}_1$  は、き裂を周期的と仮定しているため、モンテカルロシミュレーションで得られた結果と差異が発生する。そこで差異の解消方法として、平均き裂間隔  $\bar{x}_1$  に補正係数を与え、き裂のばらつきを考慮した平均き裂間隔  $\bar{x}_1^*$  を代入することとした。

$$d\bar{\xi}_m = \bar{\xi}_0 + 3\bar{\xi}_0 \frac{\sigma_{deb}}{\sigma_1 + \sigma_{th} - \sigma_{deb}} \quad \text{for } 2 < \bar{x}_1^*/\delta \quad (3-1)$$

$$d\bar{\xi}_m = \bar{\xi}_0 \left[ 1 - 4 \left( 1 - \frac{\bar{x}_1^*}{2\delta} \right)^3 \right] \\ + 3\bar{\xi}_0 \frac{\sigma_{deb}}{\sigma_1 + \sigma_{th} - \sigma_{deb}} \left[ -4 \left( \frac{\bar{x}_1^*}{2\delta} \right)^2 + 8 \left( \frac{\bar{x}_1^*}{2\delta} \right) - 3 \right] \\ \text{for } 1 \leq \bar{x}_1^*/\delta \leq 2 \quad (3-2)$$

$$d\bar{\xi}_m = \bar{\xi}_0 \times 4 \left( \frac{\bar{x}_1^*}{2\delta} \right)^3 \quad \text{for } 0 \leq \bar{x}_1^*/\delta \leq 1 \quad \dots (3-3)$$

$$\bar{x}_1^* = \Lambda \bar{x}_1 \quad \dots \quad (3-4)$$

補正係数  $\Lambda$  は理論的な一次元空間ランダム充填問題から求めた値である 1.337<sup>(13), (14)</sup> を用いた。

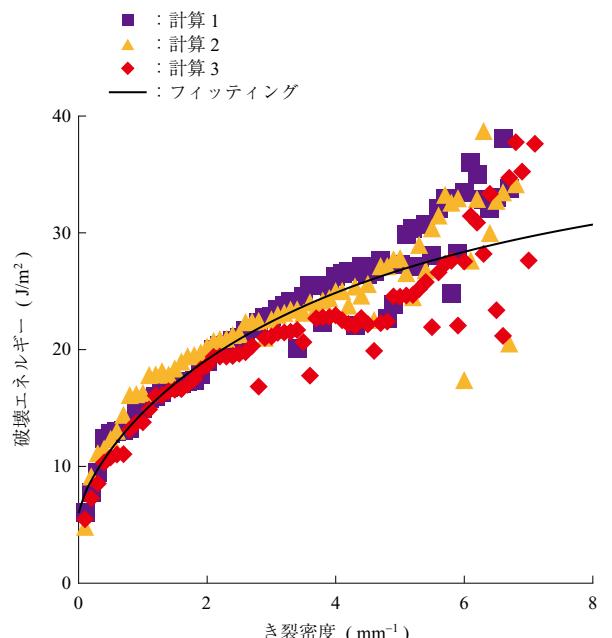
次にき裂が成長する条件として、(3-5)式を用いた。

$$d\bar{\xi}_m \geq V_m \Gamma_{mR} \quad \dots \quad (3-5)$$

ここで、 $\Gamma_{mR}$  はマトリックスの破壊エネルギーである。モンテカルロシミュレーションで得られた破壊エネルギーとき裂密度の関係とフィッティングカーブを第7図に示す。き裂成長過程で破壊エネルギーが増加することから、マトリックスの破壊エネルギー  $\Gamma_{mR}$  は、ばらつきを考慮したき裂密度  $\bar{\rho}_1^*$  の関数として(3-6)式が成り立つものとした。

$$\Gamma_{mR}(\bar{\rho}_1^*) = \Gamma_{m0} + (\Gamma_{m_{max}} - \Gamma_{m0}) \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{\bar{\rho}_1^*}{\rho_0} \right)^a \right) \right) \quad \dots (3-6)$$

ここで、 $\Gamma_{m0}$  は初期破壊エネルギー、 $\Gamma_{m_{max}}$  は最大破壊エネルギー、 $\rho_0$  は特性き裂密度、 $a$  は欠陥のばらつきに関する係数である。第3表のケース1のモンテカルロシミュレーションを3回実施して得られたき裂密度-破壊エネルギー関係を用い、 $\Gamma_{m0} = 6 \text{ J/m}^2$ <sup>(3)</sup> の制約条件のもと、最小二乗法により各パラメータを求めた。フィッティング



第7図 モンテカルロ法によって計算された破壊エネルギーとき裂密度に対するフィッティングカーブ

Fig. 7 Fitting curve for fracture energy vs. crack density calculated by Monte Carlo method

カーブのパラメータは  $\Gamma_{m_{max}} = 37.1 \text{ J/m}^2$ ,  $\rho_0 = 4.38 \text{ mm}^{-1}$ ,  $a = 0.763$  である。また、各応力  $\sigma_1$  に対して、(3-5)式の等号が成立したときのばらつきを考慮したき裂密度  $\bar{\rho}_1^*$  を数値的に計算した。この際、き裂密度は周期的であることを利用し、(3-7)式に示すき裂間隔とき裂密度の関係を用いた。

$$\bar{\rho}_1^* = \frac{1}{\bar{x}_1^*} \quad \dots \quad (3-7)$$

次に応力とひずみの関係を求めた。新たに得られたき裂間の中央を原点としたとき、き裂が周期的に並んでいるため、複合材料全体の平均ひずみ  $\epsilon_1$  は、繊維のひずみをき裂間で平均化した(3-8)式となる。

$$\epsilon_1 = \frac{2}{\bar{x}_1^*} \int_0^{\bar{x}_1^{*2}} \epsilon_f^m dx \quad \dots \quad (3-8)$$

具体的に計算した結果は(3-9), (3-10)式のとおりである<sup>(1)</sup>。

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{V_m E_m}{V_f E_f E_1} \frac{\delta}{\bar{x}_1^*} (\sigma_1 + \sigma_{th} + \sigma_{deb})$$

$$\text{for } 1 \leq \bar{x}_1^* / 2\delta \quad \dots \quad (3-9)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{V_f E_f} + \frac{V_m E_m}{V_f E_f E_1} \sigma_{th} \\ &- \frac{V_m E_m}{V_f E_f E_1} \frac{\bar{x}_1^*}{4\delta} (\sigma_1 + \sigma_{th} - \sigma_{deb}) \end{aligned}$$

$$\text{for } 1 \geq \bar{x}_1^* / 2\delta \quad \dots \quad (3-10)$$

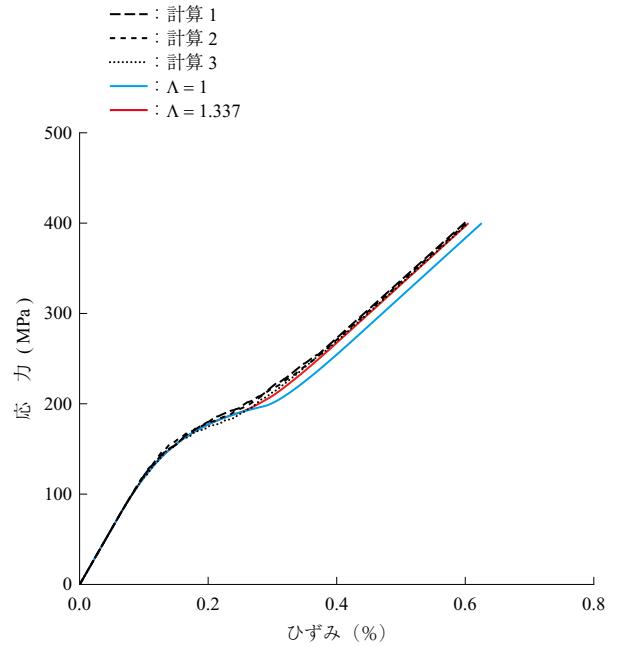
### 3.2 計算結果

モンテカルロ法によるランダムなマトリックスき裂成長計算結果と欠陥のばらつきを考慮した周期的なマトリックスき裂成長モデルの計算結果を比較した。第8図に応力–ひずみ関係、第9図にき裂密度–応力関係を示す。 $\Lambda = 1$  はマトリックスき裂のばらつきの影響を考慮しない場合、 $\Lambda = 1.337$  はマトリックスき裂のばらつきの影響を考慮した場合である。補正係数  $\Lambda = 1.337$  を与えることで、ランダムなマトリックスき裂成長計算結果と周期的なマトリックスき裂成長計算結果がよく一致した。

## 4. 繊維破断モデル

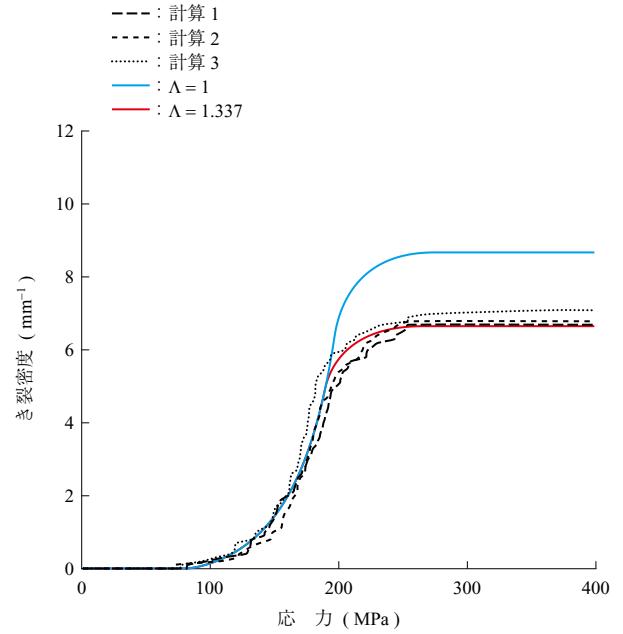
### 4.1 計算モデル

セラミック繊維のようなぜい性材料は、材料の微視的欠陥の寸法、形状、分布によって強度が決定されるため、個々の繊維強度は確率的なばらつきを有する。そこで、ワイブル分布に基づく確率論的な繊維破断モデルを採用した。具体的な繊維破断確率  $P_f$  は(4-1)式のとおりである<sup>(1), (15)</sup>。



第8図 モンテカルロ法と周期的なマトリックスき裂成長モデルによって計算された応力–ひずみ線図

Fig. 8 Stress-strain curves calculated by Monte Carlo method and periodic matrix crack growth model



第9図 モンテカルロ法と周期的なマトリックスき裂成長モデルによって計算されたき裂密度–応力線図

Fig. 9 Crack density-stress curves calculated by Monte Carlo method and periodic matrix crack growth model

$$P_f(x_0, S) = 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{m_f + 1} \left( \frac{S}{\sigma_c} \right)^{m_f + 1} \left[ 1 - \left( 1 - \left( \frac{x_0}{l_s} \right)^{m_f + 1} \right) \right] \right\} \quad \dots \quad (4-1)$$

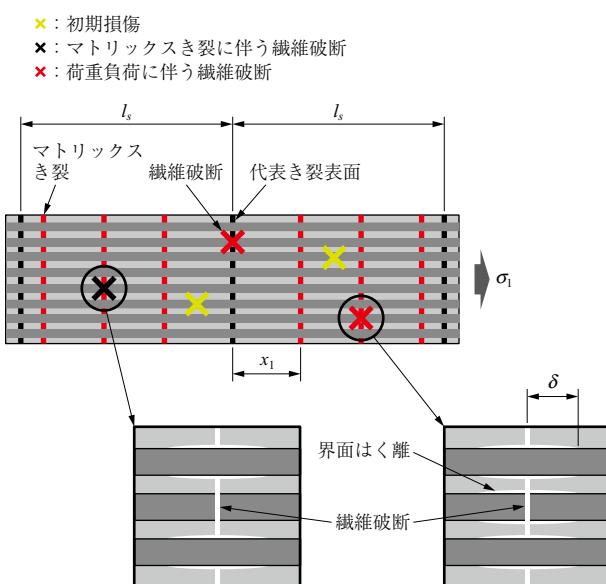
ここで、 $S$  は纖維応力、 $l_s$  は纖維応力の回復長さ、 $\sigma_c$  は特徴応力、 $m_f$  はワイブル尺度係数、 $x_0$  は纖維破断による纖維の応力変化範囲である。また、複合材料の強度を求める場合、破断した纖維が支えていた荷重が破断していない纖維にどのように分担されるか見積もりることが重要となる。そこで、ある纖維が破断した後、残りの纖維全体で荷重を均等に負担するという Global Load Sharing ( GLS ) モデルを採用した。具体的な式は (4-2)～(4-4) 式のとおりである<sup>(15)</sup>。

$$\frac{\sigma_1}{V_f} = [1 - F_R]S + F_R \frac{S}{2} \quad \dots \quad (4-2)$$

$$F_R = P_{d_{ini}} + (P_p + (1 - P_{d_{ini}})(1 - P_p))P_f \frac{2l_s}{\bar{x}_1^*} \quad \dots \quad (4-3)$$

$$P_{d_{ini}} = 1 - \exp\left(-\frac{2l_s f_d}{\delta_c}\right) \quad \dots \quad (4-4)$$

ここで、 $F_R$  は GLS モデルの範囲  $2l_s$  内の纖維破断確率、 $P_{d_{ini}}$  は初期損傷による纖維破断確率、 $P_p$  はマトリックスき裂が纖維に進展する確率、 $\delta_c$  は特徴長さ、 $f_d$  は  $\delta_c$  当たりの初期損傷数である。GLS モデルにおけるマトリックスき裂と纖維破断を第 10 図に示す。纖維の損傷を初期損傷、マトリックスき裂に伴う纖維破断、荷重負荷による纖維破断に分割した。(4-2) 式の非線形方程式を数値的に解くことで纖維応力  $S$  が得られ、纖維応力と引張応力のつり合いが取れなくなるとき、つまり  $\sigma_1$  が最大値になったときが複合材料の最終破断強度となる。



第 10 図 GLS モデルにおけるマトリックスき裂と纖維破断  
Fig. 10 Matrix crack and fiber breakage in GLS model

さらに、GLS モデルは、ひずみを過大評価する点から、局所的な纖維破壊の効果を考慮した Local Load Sharing ( LLS ) モデルを採用した計算も行った。なお、今回採用した LLS モデルは、GLS モデルから求められる破断強度を活用できる方法を採用した。纖維束の破断確率  $H_{n_f L_z}$  は (4-5)、(4-6) 式のとおりである<sup>(15)</sup>。

$$H_{n_f L_z}(\sigma_{fb}) = 1 - \left(1 - \Phi\left((\sigma_{fb} - \mu_{n_f}^*) / \gamma_{n_f}^{**}\right)\right)^{n'} \quad \dots \quad (4-5)$$

$$\mu_{n_f}^* = \mu + \Delta_{n_f} \quad \dots \quad (4-6)$$

$\sigma_{fb}$  は纖維束応力、 $\Phi$  は局所的な影響を考慮した纖維束強度の平均  $\mu_{n_f}^*$ 、局所的な影響を考慮した標準偏差  $\gamma_{n_f}^{**}$  とするガウス分布の累積分布関数、 $n'$  は評価対象内の最終破断を決定する最小領域の割合、 $\mu$  は GLS モデルで求めた複合材料の最終破断強度、 $\Delta_{n_f}$  は臨界纖維本数  $n_f$  に対する強度補正<sup>(16)、(17)</sup> である。この式から、 $H_{n_f L_z}(\sigma_{fb}^*) = 0.5$  のときの破断強度  $\sigma_{fb}^*$  を求めた。

最後に、纖維破断によるひずみ増分  $\Delta\epsilon$  は (4-7) 式、(4-8) 式で表される。

$$\Delta\epsilon = \frac{1}{E_f} \left( S - \frac{\sigma_1}{V_f} \right) \left( \frac{2\delta}{\bar{x}_1^*} \right) \quad \text{for } 1 \leq \bar{x}_1^*/2\delta \quad \dots \quad (4-7)$$

$$\Delta\epsilon = \frac{1}{E_f} \left( S - \frac{\sigma_1}{V_f} \right) \quad \text{for } 1 \geq \bar{x}_1^*/2\delta \quad \dots \quad (4-8)$$

このひずみ増分を 3.1 節で示した (3-9)、(3-10) 式のひずみに加える。よって、応力とひずみの関係は (4-9)、(4-10) 式のとおりである。

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{V_m E_m}{V_f E_f E_1} \frac{\delta}{\bar{x}_1^*} (\sigma_1 + \sigma_{th} + \sigma_{deb}) + \Delta\epsilon \quad \text{for } 1 \leq \bar{x}_1^*/2\delta \quad \dots \quad (4-9)$$

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{V_f E_f} + \frac{V_m E_m}{V_f E_f E_1} \sigma_{th} - \frac{V_m E_m}{V_f E_f E_1} \frac{\bar{x}_1^*}{4\delta} (\sigma_1 + \sigma_{th} - \sigma_{deb}) + \Delta\epsilon \quad \text{for } 1 \geq \bar{x}_1^*/2\delta \quad \dots \quad (4-10)$$

#### 4.2 計算に用いるパラメータ

計算に用いるパラメータを第 1 表および第 4 表に示す。纖維破断に関する材料パラメータは SiC/CAS 複合材料の引張試験の Fracture mirror 觀察から求めたものを使用した<sup>(18)</sup>。これは初期損傷を含む強度であることから、初期損傷数  $f_d$  は 0 とした。また、マトリックスき裂から纖維へのき裂進展確率  $P_p$  は、Haruyama ら<sup>(1)</sup> が示した

第 4 表 一方向 SiC/CAS 複合材料のマトリックスき裂と繊維破断に関するパラメータ

Table 4 Parameters of unidirectional SiC/CAS composites on matrix cracks and fiber breakage

記号	説明	値	単位
$\Gamma_d$	界面はく離エネルギー	0.1	J/m <sup>2</sup>
$\tau$	界面せん断応力	18	MPa
$\Gamma_{m0}$	初期き裂発生時の破壊エネルギー	6 <sup>(3)</sup>	J/m <sup>2</sup>
$\Gamma_{m_{max}}$	最大破壊エネルギー	37.1	J/m <sup>2</sup>
$\rho_0$	特徴マトリックスき裂密度	4.38	mm <sup>-1</sup>
$a$	欠陥のはらつきに関する係数	0.763	—
$\sigma_c$	特徴繊維強度	2.25 <sup>(18)</sup>	GPa
$m_f$	繊維強度に関するワイル形状パラメータ	1.7 <sup>(18)</sup>	—
$f_d$	初期損傷数	0	—
$P_p$	マトリックスき裂から繊維へのき裂進展確率	0.06	—

方法を採用した。具体的には、He ら<sup>(19)</sup>の異材料へのき裂進展とその界面へのき裂偏向の条件に関する弾性係数の比とエネルギー解放率の比の関係と、Push-out 試験で取得した界面はく離応力のワイル累積プロットから求めた。なお、SiC/CAS 複合材料の界面はく離応力のワイル累積プロットデータが文献にて確認できなかったため、代わりにニカロン® 繊維と化学気相含浸法 (Chemical Vapor Infiltration : CVI) プロセスで作成した SiC マトリックスから成る SiC/SiC 複合材料の結果を使用した<sup>(20)</sup>。初めに He らの結果から、マトリックスき裂が繊維に進展する条件は、

$$\frac{\Gamma_d}{\Gamma_f} = 0.385 \quad \dots \quad (4-11)$$

となる。ここで、 $\Gamma_f$  は繊維の破壊エネルギーである。また、SiC (ニカロン) 繊維の破壊じん性値  $K_f \approx 1 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ <sup>(21)</sup> を用い、

$$\Gamma_f = \frac{K_f^2}{E_f} = 5.26 \left( \text{J/m}^2 \right) \quad \dots \quad (4-12)$$

と求めた。さらに、(2-10), (4-11), (4-12) 式より、マトリックスき裂が繊維に進展するときの界面はく離は、 $\sigma_{deb}^* = 215.6 \text{ MPa}$  と求められた。この値を (4-13) 式の界面はく離応力のワイル累積プロットに代入した。

$$F(\sigma_{deb}^*) = 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{\sigma_{deb}^* - \gamma}{\sigma_{d_0}} \right)^{m_d} \right\} \quad \dots \quad (4-13)$$

パラメータ  $\gamma = 0 \text{ MPa}$ ,  $m_d = 1.0081$ ,  $\sigma_{d_0} = 61.793 \text{ MPa}$ <sup>(1)</sup> から、 $F(\sigma_{deb}^*) = 0.94$  となった。界面はく離応力が高い場合、マトリックスき裂から界面へき裂偏向せずに繊維にき

裂進展する。よって、ある界面はく離応力  $\sigma_{deb}^*$  以上でマトリックスき裂が繊維に進展すると考えると、累積確率  $1 - F(\sigma_{deb}^*)$  が、マトリックスき裂が繊維に進展するときの確率  $P_p$  であると考えられる。よって、

$$P_p = 1 - F(\sigma_{deb}^*) = 0.06 \quad \dots \quad (4-14)$$

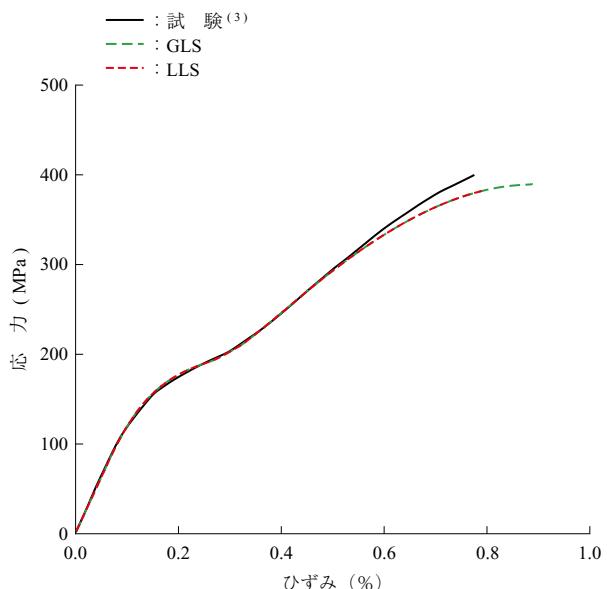
と求められる。LLS モデルに関するパラメータは Haruyama らの文献を参照していただきたい<sup>(22)</sup>。

### 4.3 計算結果

計算と試験の応力-ひずみ関係を比較した結果を第 11 図に示す。この結果より、マトリックスき裂飽和後の計算と試験の接線弾性係数がよく一致した。GLS モデルでは、破断ひずみを過大評価しているが、LLS モデルによって、結果が改善された。また、過小評価になるものの、試験の破断強度をおおよそ予測できた。

## 5. 結 言

エネルギー基準のマトリックスき裂成長モデルとモンテカルロ法を用いて、欠陥のはらつきを考慮したマトリックスき裂成長計算を行った。その結果、応力-ひずみ関係は初期の擬延性領域まで計算結果と試験結果がよく一致し、き裂密度-応力関係はき裂の発生から飽和するまでの過程全体で計算結果と試験結果がよく一致した。また、周期的なマトリックスき裂成長モデルを検討し、補正係数を加えることでモンテカルロ法によるランダムなマトリックスき裂成長計算結果と同等の結果が得られることを示した。さ



第 11 図 試験と GLS モデル、LLS モデルから得られた応力-ひずみ線図

Fig. 11 Stress-strain curves for experimental, GLS and LLS results

らに、繊維破断モデルとして、マトリックスき裂が繊維に進展する確率を考慮した GLS モデルおよび LLS モデルを用いた。その結果、LLS モデルによって、試験の破断ひずみをよく予測でき、過小評価になるものの、試験の破断強度をおおよそ予測できた。

なお、本稿で説明した一方方向 CMC の静的引張モデルは直交積層 CMC に拡張されている。モデルの詳細および検証方法は Haruyama らの論文<sup>(15), (22)</sup>を参照していただきたい。

### — 謝 辞 —

本研究を進めるに当たり、東北大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻 岡部朋永教授および東北大学グリーン未来創造機構グリーンクロスティック研究センター 川越吉晃准教授のご協力をいただきました。ここに記して謝意を表します。

### 参 考 文 献

- (1) D. Haruyama, Y. Kawagoe and T. Okabe : Analytical modeling of energy-based matrix crack growth and fiber breakage in unidirectional ceramic matrix composites under static tensile behavior in the longitudinal direction, *Advanced Composite Materials*, 2024
- (2) F. W. Zok and S. M. Spearing : Matrix crack spacing in brittle matrix composites, *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 40, No. 8, (1992), pp. 2,033 – 2,043
- (3) A. W. Pryce and P. A. Smith : Behaviour of unidirectional and crossply ceramic matrix composites under quasi-static tensile loading, *Journal of Materials Science*, Vol. 27, (1992), pp. 2,695 – 2,704
- (4) M. J. Blissett, P. A. Smith and J. A. Yeomans : Thermal shock behaviour of unidirectional silicon carbide fibre reinforced calcium aluminosilicate, *Journal of Materials Science*, Vol. 32, (1997), pp. 317 – 325
- (5) T. J. Mackin and F. W. Zok : Fiber Bundle Pushout: A Technique for the Measurement of Interfacial Sliding Properties, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 75, No. 11, (1992), pp. 3,169 – 3,171
- (6) J.-M. Domergue, E. Vagaggini and A. G. Evans : Relationships between Hysteresis Measurements and the Constituent Properties of Ceramic Matrix Composites: II, Experimental Studies on Unidirectional Materials, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 78, No. 10, (1995), pp. 2,721 – 2,731
- (7) M. He, B.-X. Wu, A. G. Evans and J. Hutchinson : Inelastic strains due to matrix cracking in unidirectional fiber-reinforced composites, *Mechanics of Materials*, Vol. 18, No. 3, (1994), pp. 213 – 229
- (8) E. Vagaggini, J.-M. Domergue and A. G. Evans : Relationships between Hysteresis Measurements and the Constituent Properties of Ceramic Matrix Composites: I, Theory, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 78, No. 10, (1995), pp. 2,709 – 2,720
- (9) D. S. Beyerle, S. M. Spearing, F. W. Zok and A. G. Evans : Damage and Failure in Unidirectional Ceramic-Matrix Composites, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 75, No. 10, (1992), pp. 2,719 – 2,725
- (10) D. Marshall : Analysis of fiber debonding and sliding experiments in brittle matrix composites, *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 40, No. 3, (1992), pp. 427 – 441
- (11) J. Sánchez, M. Elizalde, A. Daniel, J. Martínez-Esnaola, I. Puente and A. Martín : Interfacial characterization of 2D woven SiC/SiC and cross-ply 0° /90° CAS/SiC composites, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 27, No. 9, (1996), pp. 787 – 792
- (12) A. G. Evans, J.-M. Domergue and E. Vagaggini : Methodology for Relating the Tensile Constitutive Behavior of Ceramic-Matrix Composites to Constituent Properties, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 77, No. 6, (1994), pp. 1,425 – 1,435
- (13) A. Rényi : On a One-Dimensional Problem Concerning Random Space-Filling, *Publication of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, Vol. 3, (1958), pp. 109 – 127
- (14) A. Kimber and J. Keer : On the theoretical average crack spacing in brittle matrix composites containing continuous aligned fibres, *Journal of Materials*

- Science Letters, Vol. 1, No. 8, ( 1982 ), pp. 353 – 354
- ( 15 ) D. Haruyama, Y. Kawagoe and T. Okabe : Analytical modeling of matrix and transverse crack growth and fiber breakage for predicting the static tensile behavior of cross-ply ceramic matrix composites, Materials System, Vol. 42, ( 2025 ), pp. 3 – 20
- ( 16 ) S. L. Phoenix and R. Raj : Overview no. 100 Scalings in fracture probabilities for a brittle matrix fiber composite, Acta Metallurgica et Materialia, Vol. 40, No. 11, ( 1992 ), pp. 2,813 – 2,828
- ( 17 ) H. E. Daniels : The Maximum of a Gaussian Process Whose Mean Path Has a Maximum, with an Application to the Strength of Bundles of Fibres, Advances in Applied Probability, Vol. 21, No. 2, ( 1989 ), pp. 315 – 333
- ( 18 ) W. A. Curtin : Stochastic damage evolution and failure in fiber-reinforced composites, Advances in Applied Mechanics, Vol. 36, ( 1998 ), pp. 163 – 253
- ( 19 ) M. Y. He, A. G. Evans and J. W. Hutchinson : Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials: Role of residual stresses, International Journal of Solids and Structures, Vol. 31, No. 24, ( 1994 ), pp. 3,443 – 3,455
- ( 20 ) L. L. Snead, D. Steiner and S. J. Zinkle : Interfacial push-out measurements of fully-bonded SiC/SiC composites, Conference: Symposium on composites, ( 1990 )
- ( 21 ) M. D. Thouless, O. Sbaizer, L. S. Sigl and A. G. Evans : Effect of interface mechanical properties on pullout in a SiC-fiber-reinforced lithium aluminum silicate glass-ceramic, Journal of the American Ceramic Society, Vol. 72, No. 4, ( 1989 ), pp. 525 – 532
- ( 22 ) D. Haruyama, Y. Kawagoe and T. Okabe : Monte Carlo simulation with energy-based matrix and transverse crack growth model for cross-ply ceramic matrix composites under static tensile behavior, Advanced Composite Materials, ( 2025 )